

АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ТИПА С ТОЧНОСТЬЮ

С.Т.Настинов - НамГУ

Аннотация. В статье рассматриваются способы аппроксимации краевых условий третьего типа с точностью для обыкновенных дифференциальных уравнений и с частными производными. При этом получаются разностная схема с трёхдиагональной матрицей.

Ключевые слова. обыкновенное дифференциальное уравнение, уравнение с частными производными, третья краевая задача, аппроксимация краевых условий с точностью

APPROXIMATION OF BOUNDARY CONDITIONS WITH ACCURACY

S.T.Nastinov- NamSU

Annotation. In the article we are considered the approximation of third kind Boundary conditions with accuracy of for ordinary and parabolic and giperbolik differential equations. Finite differential sxem is tree diagonal linear system of equations.

Key words. Ordinary and parabolic and giperbolik differential equations, third kind boundary conditions, approximation boundary conditions with accuracy of

ЧЕГАРА ШАРТЛАРИНИ АНИҚЛИК БИЛАН ЙАҚИНЛАШТИРИШ

С.Т.Настинов - НамДУ

Аннотация. Мақолада ОДТ, ПДТ, ГДТлар учун чегара шартларни аниқлик билан аппроксимция қилиш қаралган. Айирмалли схемалар уч диогоналли чизиқли тенгламалар системасидан иборат.

Калит сўзлар. Оддий, параболик ва гиперболик дифференциал тенгламалар учун чегара шартлар, аниқликдаги аппроксимация, уч диогонал чизиқли тенгламалар системаси кўринишдаги айирмалли схема.

1. Постановка задачи. Рассматриваются краевые задачи для обыкновенных, параболических, гиперболических дифференциальных уравнений:

$$1) u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), a < x < b, \tag{1}$$

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = g_1, \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = g_2 \quad ; \tag{2}$$

$$2) u_t = u_{xx} + f(x, t), 0 < x < 1, 0 \leq t \leq T, u(x, 0) = u_0(x), \tag{3}$$

$\bar{u}_1 = \bar{u}(x_0 + h) = \bar{u}_0 + \bar{u}'_0 h + 0.5\bar{u}''_0 h^2 + 0(h^3)$. Тогда получаем: $u_1 = u(x_0 + h) = u_0 + u'_0 h + 0.5u''_0 h^2$.

Так как $u''_0 = f_0 - qu_0 - pu'_0$, то исключив u''_0 из предыдущего равенства имеем:

$$\tilde{b}_0 u_0 + \tilde{c}_0 u_1 = \tilde{d}_0, \tilde{b}_0 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2 - p_0 h} (q_0 h - \frac{2}{h}), \tilde{c}_0 = \frac{2\alpha_1}{h(2 - p_0 h)}, \tilde{d}_0 = g_1 + \frac{\alpha_1 h f_0}{2 - p_0 h} \quad (11)$$

Аналогично, для правого краевого условия получаем:

$$u_{m-1} = u(x_m - h) = u_m - hu'_m + \frac{h^2}{2} u''_m + 0(h^3), u''_m = f_m - q_m u_m - p_m u'_m.$$

Подстановка определяемого производной u'_m в правое краевое условие нас приводит к результатам:

$$\tilde{a}_m u_{m-1} + \tilde{b}_m u_m = \tilde{d}_m, \tilde{a}_m = -\frac{2\beta_1}{h(2 + p_m h)}, \tilde{b}_m = \beta_0 + \frac{\beta_1}{2 + p_m h} (\frac{2}{h} - hq_m), \tilde{d}_m = g_2 - \frac{\beta_1 h f_m}{2 + p_m h} \quad (12)$$

Промежуточные уравнения (8) при этом не меняются, и имеем $\tilde{A}u = \tilde{d}$, где

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{c}_0 & \cdot & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & & \\ & a_2 & b_2 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & a_{m-1} & b_{m-1} & c_{m-1} & \\ & & & & \tilde{a}_m & \tilde{b}_m & \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \tilde{d} = \begin{bmatrix} \tilde{d}_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{m-1} \\ \tilde{d}_m \end{bmatrix} \quad (13)$$

Кратко изложим способ получения равенств (11) [1,2]. Из формулы Тейлора и дифференциального уравнения получаем:

$$(u_1 - u_0) / h = u'_0 + (h/2)(f_0 - q_0 u_0 - p_0 u'_0) + 0(h^2) \Rightarrow u'_0 = (2/(2 - hp_0))((u_1 - u_0) / h - (h/2)f_0 + hq_0 u_0 / 2) + 0(h^2)$$

Подставляя в левое граничное условие значение производной u'_0 имеем

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_0 u'_0 = \alpha_0 u_0 + \frac{2\alpha_1}{2 - hp_0} [\frac{u_1 - u_0}{h} + \frac{hq_0 u_0}{2}] - \frac{h\alpha_1 f_0}{2 - hp_0} = g_1 + 0(h^2),$$

$$(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2 - hp_0} (hq_0 - \frac{2}{h}))u_0 + \frac{2\alpha_1}{h(2 - hp_0)} u_1 = g_1 + \frac{h\alpha_1 f_0}{2 - hp_0}.$$

И мы приходим к равенствам (11). Аналогично, для правого краевого условия используем формулы:

$$u_{m-1} = u(x_m - h) = u_m - hu'_m + \frac{h^2}{2} u''_m + 0(h^3), u''_m = f_m - q_m u_m - p_m u'_m.$$

Подстановка производной u'_m в правое краевое условие нас приводит к результатам (12).

Метод А.А. Самарского применён в [1,2] для дифференциальных уравнений (1)-(5).

3. Аппроксимация граничных производных симметричной разностной производной. Расширим сетку точек двумя дополнительными узлами $x_{-1} = x_0 - h, x_{m+1} = x_m + h$ и аппроксимируем краевые условия так:

$$\alpha_0 u_0 + (u_1 - u_{-1}) / 2h = g_1, \tag{14}$$

$$\beta_0 u_m + (u_{m+1} - u_{m-1}) / 2h = g_2. \tag{15}$$

К этим уравнениям прибавляем два уравнения из (8) с номерами $k=0, k=m$:

$$\alpha_0 u_0 + (u_1 - u_{-1}) / 2h = g_1, a_0 u_{-1} + b_0 u_0 + c_0 u_1 = d_0,$$

$$\beta_0 u_m + (u_{m+1} - u_{m-1}) / 2h = g_2, a_m u_{m-1} + b_m u_m + c_m u_{m+1} = d_m.$$

Из этих уравнений для $k=0, k=m$ исключаем неизвестные u_{-1}, u_{m+1} и получаем::

$$\tilde{b}_0 u_0 + \tilde{c}_0 u_1 = \tilde{d}_0, \quad \tilde{b}_0 = 2h\alpha_0 a_0 + \alpha_1 b_0, \tilde{c}_0 = \alpha_1 (a_0 + b_0), \tilde{d}_0 = \alpha_1 d_0 + 2ha_0 g_1, \tag{16}$$

$$\tilde{a}_m u_{m-1} + \tilde{b}_m u_m = \tilde{d}_m, \quad \tilde{a}_m = \beta_1 (a_m + b_m), \tilde{b}_m = -2h\beta_0 c_m + \beta_1 b_m, \tilde{d}_m = \beta_1 d_m - 2hc_m g_2. \tag{17}$$

В результате опять получаем систему линейных уравнений $\tilde{A}u = \tilde{d}$: с изменёнными (16,17). В формулах (16), (17) нет операции деления, и они наиболее простые. Приведём укрупнённый алгоритм решения задачи в Mathcad:

```

c := 1    d := 2    n := 10
h := (u - v) / n    i := 0..n    x_i := c + i · h
alpha_0 := 1    alpha_1 := 2    gamma_1 := -3    beta_0 := 3    beta_1 := 1    gamma_2 := 0.5
p(x) := x^2    q(x) := -x    p_i := p(x_i)    q_i := q(x_i)    f(x) := (6 - 3 · x^3) / x^4    f_i := f(x_i)
i := 0..n    a_i := 1 - p_i · (h / 2)    b_i := q_i · h^2 - 2    c_i := 1 + p_i · (h / 2)
i := 0    A_0,0 := 2 · h · alpha_0 · a_0 + b_0 · alpha_1    A_0,1 := alpha_1 · a_0 + alpha_1 · c_0    D_0 := 2 · h · gamma_1 · a_0 + alpha_1 · h^2 · f_0
i := 1..n-1    A_i,i-1 := 1 - p_i · (h / 2)    A_i,i := q_i · h^2 - 2    A_i,i+1 := 1 + p_i · (h / 2)    D_i := h^2 · f_i
i := n    A_n,n-1 := beta_1 · (c_n + a_n)    A_n,n := -2 · h · beta_0 · c_n + beta_1 · b_n    D_n := -2 · h · gamma_2 · c_n + beta_1 · h^2
u := A^-1 · D    u^T =

```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.981	0.811	0.683	0.583	0.504	0.44	0.387	0.344	0.307	0.276	0.249

```

u^T =

```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0.826	0.694	0.592	0.51	0.444	0.391	0.346	0.309	0.277	0.25

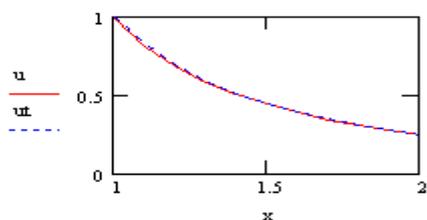


Рис.1. Укрупнённый алгоритм в Mathcad

4. Аппроксимация граничных производных несимметрической формулой производных.

Для краевых условий можно использовать несимметричные приближенные формулы производных:

$$u'_0 = \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} + O(h^2), u'_m = \frac{u_{m-2} - 4u_1 + 3u_2}{2h} + O(h^2) \tag{18}$$

Но при этом, в СЛАУ $\tilde{A}u = \tilde{d}$ матрица A перестает быть трёхдиагональной, так как уравнения с номерами $k=0, k=m$ будет содержать по три неизвестных. Если из уравнений с номерами $k=0, k=m$ и из краевых условий исключить u_2, u_{m-2} , то опять получим трёхдиагональной системы уравнений $\tilde{A}u = \tilde{d}$, где

$$\tilde{b}_0 = 2hc_0 - \alpha_1(3c_1 - a_1), \tilde{c}_0 = \alpha_1(4c_1 - b_1), \tilde{d}_0 = 2hc_1g_1 + \alpha_1d_2, \tag{19}$$

$$\tilde{a}_m = -\beta_1(b_{m-1} + a_{m-1}), \tilde{b}_m = 2h\beta_0a_{m-1} - \beta_1c_{m-1} + 3\beta_1d_{m-1}, \tilde{d}_m = 2ha_{m-1}g_2 - \beta_1d_{m-1}. \tag{20}$$

Проведенные эксперименты [3] с разностными схемами, показывают хорошую точность. Если потребуется вместо формул (18) можно также использовать другие формулы дифференцирования более высокой точности. В этом случае меняются только уравнения с номерами 0 и m.

4. Случай второго типа краевых условий. Если в формулах положить

$\alpha_0 = \beta_0 = 0, \alpha_1 = \beta_1 = 1$, то получаем формулы для 2-го типа условий:

а) Случай формул А.А. Самарского:

$$\tilde{b}_0 = \frac{h^2q_0 - 2}{h(2 - hp_0)}, \tilde{c}_0 = \frac{2}{h(2 - hp_0)}, \tilde{d}_0 = g_1 + \frac{hf_0}{2 - hp_0}, \tag{21}$$

$$\tilde{a}_m = \frac{-2}{h(2 + hp_m)}, \tilde{b}_m = \frac{2 - h^2q_m}{h(2 + hp_m)}, \tilde{d}_m = g_2 - \frac{hf_m}{2 + hp_m} \tag{22}$$

б) Случай симметрических краевых условий:

$$\tilde{b}_0 = b_0, \tilde{c}_0 = a_0 + b_0, \tilde{d}_0 = d_0 + 2ha_0g_1, \tag{23}$$

$$\tilde{a}_m = a_m + c_m, \tilde{b}_m = b_m, \tilde{d}_m = d_m - 2hc_mg_2$$

Из полученных формул вытекает, что наиболее естественный случай-это симметрической приближённой производной.

5. Случай параболического дифференциального уравнения.

Возьмём условия (4) и чистую неявную разностную схему:

$$\alpha_0u(a, t) + \alpha_1u'(a, t) = g_1(t), \beta_0u(b, t) + \beta_1u'(b, t) = g_2(t),$$

$$\frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} = \frac{u_{k-1}^{j+1} - 2u_k^{j+1} + u_{k+1}^{j+1}}{h^2} + f_k^{j+1}, k = 1..m-1, j = 0..n-1. \tag{24}$$

Аппроксимируем краевые условия симметрической разностной производной второго порядка точности:

$$\alpha_0 u_0^{j+1} + \alpha_1 (u_1^{j+1} - u_{-1}^{j+1}) / 2h = g_1^{j+1}, \beta_0 u_m^{j+1} + \alpha_1 (u_{m+1}^{j+1} - u_{m-1}^{j+1}) / 2h = g_2^{j+1}, \quad (25)$$

$$u_{-1}^{j+1} = \alpha^{-1} [2h\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1^{j+1} - 2hg_1^{j+1}], u_{m+1}^{j+1} = \beta^{-1} [2h\beta_0 u_m + \alpha_1 u_{m+1}^{j+1} - 2hg_2^{j+1}]. \quad (26)$$

Из уравнений (24) для $k=0, k=m$) с помощью (26) исключаем неизвестные $u_{-1}^{j+1}, u_{m+1}^{j+1}$:

$$(-2hr\alpha_0 + \alpha_1 + 2r\alpha_1)u_0^{j+1} - 2r\alpha_1 u_1^{j+1} = \alpha_1 (u_0^j + \tau f_0^{j+1}) + 2rhg_1^{j+1}, \quad (26)$$

$$-2r\beta_1 u_{m-1}^{j+1} + (2hr\beta_0 + \beta_1 + 2r\beta_1)u_m^{j+1} = \beta_1 (u_m^j + \tau f_m^{j+1}) - 2rhg_2^{j+1}. \quad (27)$$

Остальные уравнения (24) не меняются, и мы опять получим СЛАУ вида $\tilde{A}u = \tilde{d}$

6. Случай гиперболического дифференциального уравнения.

Возьмём опять условия (6) и чистую неявную разностную схему:

$$\frac{u_k^{j-1} - 2u_k^j + u_k^{j+1}}{\tau^2} = \frac{u_{k-1}^{j+1} - 2u_k^{j+1} + u_{k+1}^{j+1}}{h^2} + f_k^{j+1}, k = 1..m-1, j = 0..n-1. \quad (28)$$

Опять аппроксимируем краевые условия симметрической разностной производной второго порядка точности (25). Из уравнений (28 для $k=0, k=m$) с помощью (26) исключаем неизвестные $u_{-1}^{j+1}, u_{m+1}^{j+1}$:

$$(2hr\alpha_0 - \alpha_1 - 2r\alpha_1)u_0^{j+1} + 2r\alpha_1 u_1^{j+1} = \alpha_1 (2u_0^j - u_0^{j-1} + \tau^2 f_0^{j+1}) + 2rhg_1^{j+1}, \quad (30)$$

$$2r\beta_1 u_{m-1}^{j+1} - (2hr\beta_0 + \beta_1 + 2r\beta_1)u_m^{j+1} = \beta_1 (2u_m^j - u_m^{j-1} + \tau^2 f_m^{j+1}) + 2rhg_2^{j+1}. \quad (31)$$

Остальные уравнения (28) не меняются, и мы опять получим СЛАУ вида $\tilde{A}u = \tilde{d}$.

Литература:

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977, -656 с.
2. Форм алев В.Ф. Резников Д.Л. Численные методы. М. Физмат лит, 2004. -400 с
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. -512 с.
4. Имомов А., Иномиддинов С., ОДТ ва ПДТ, 3 тур чегара шартлар учун ЧАС куриш. Экспериментлар. Нам ДУ ахборотномаси, Махсус сон. 2020 й 38-45 б.
5. Имомов А., Иномиддинов С., Настинов С. ПДТ 3 тур чегара масалага айирмали схема. Нам ДУ ахборотномаси, 2022 й №4 сон 28-36 б.
6. Имомов А., Иномиддинов С., Настинов С. ОДТ 3 тур чегара масалага айирмали схема. Нам ДУ ахборотномаси, 2022 й №2 сон 51-6 б.
7. Имомов А., Иномиддинов С., Настинов С. ГДТ 3 тур чегара масалага айирмали схема. Germany International Conference, 2022. 279-284 с.